

有限个非自渐近非扩张映象公共不动点的逼近

韩秀平, 冯富荣, 潘状元

(哈尔滨理工大学 应用数学, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 本文在一致凸 Banach 空间下, 讨论了有限个非自渐近非扩张映象对公共不动点的逼近, 证明了带扰动项凸组合迭代格式的强弱收敛性.

关键词: 一致凸 Banach 空间; 渐近非扩张映象; Opial 条件

中图分类号: O177.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)05-0100-05

Approximating Common Fixed Points of a Finite Family of Nonself Asymptotically Nonexpansive Mappings

HAN Xiu-ping, FENG Fu-rong, PAN Zhuang-yuan

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, approximating common fixed points of a finite family of nonself asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex Banach space is obtained, and weak and strong convergence of iterative scheme with perturbed convex combination are proved.

Key words: uniformly convex Banach space; asymptotically nonexpansive mapping; Opial condition

1 预备知识

假设 E 为实 Banach 空间, K 是 E 的非空子集.

定义 1 称映象 $T: K \rightarrow E$ 是渐近非扩张映象, 若存在一个数列 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$, 使得

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|, \forall x, y \in K, n \in \mathbb{N}$$

定义 2 称映象 $P: E \rightarrow K$ 为收缩映象, 若 $P^2 = P$; 称 E 的子集 K 为 E 的收缩, 若存在一个连续收缩映象 $P: E \rightarrow K$, $\forall x \in K$, 使得 $Px = x$.

定义 3 称映象 $T: K \rightarrow E$ 是非自渐近非扩张映象, 若存在一个数列 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$, $P: E \rightarrow K$ 非扩张收缩映象, 使得 $\|T(PT)^{n-1}x -$

$$T(PT)^{n-1}y\| \leq k_n \|x - y\|, \forall x, y \in K, n \in \mathbb{N}.$$

定义 4 称映象 $T_i: K \rightarrow E$ 满足条件 (A), 若存在一个非减函数 $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, 且 $f(0) = 0$, $\forall r > 0$, $f(r) > 0$, 使得

$$a^1 \|x - T_1 x\| + a^2 \|x - T_2 x\| + \cdots + a^N \|x - T_N x\| \geq f(d(x, F)), \forall x \in K; d(x, F) = \inf \|x - x^*\|, \forall x^* \in F, 0 \leq a^i \leq 1, \text{ 且 } \sum_{i=1}^N a^i = 1, i = 1, 2, \cdots, N.$$

对于渐近非扩张映象的迭代收敛性问题, 已被许多学者研究过^[1-7].

本文给出下列逼近有限个非自渐近非扩张映象 $\{T_i: i = 1, 2, \cdots, N\}$ 公共不动点的迭代格式:

收稿日期: 2008-09-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19971022)

作者简介: 韩秀平 (1979—), 女, 硕士研究生, E-mail: hjh8000@sohu.com;

潘状元 (1954—), 男, 教授, 硕士生导师.

$$\left. \begin{aligned} x_n^1 &= P(\alpha_n^1 T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + \beta_n^1 x_n + \gamma_n^1 u_n^1) \\ x_n^2 &= P(\alpha_n^2 T_2 (PT_2)^{n-1} x_n^1 + \beta_n^2 x_n^1 + \gamma_n^2 u_n^2) \\ &\dots \\ x_n^N &= P(\alpha_n^N T_N (PT_N)^{n-1} x_n^{N-1} + \beta_n^N x_n^{N-1} + \gamma_n^N u_n^N) \\ x_{n+1} &= x_n^N \\ x_1 &\in K, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

在一定条件下,证明了该迭代格式的强弱收敛性,所得结果推广了文 [1-2] 的结果.

为证明主要结果,需要引入以下引理:

引理 1^[3] 假设 E 为 Banach 空间, $p > 1$ 和 $R > 1$ 为固定常数,则 E 为一致凸 Banach 空间,当且仅当存在一个连续的严格增的凸函数 $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(0) = 0$, 使得

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \leq \lambda \|x\|^p + (1-\lambda) \|y\|^p - W_p(\lambda) g(\|x-y\|)$$

对任意的 $x, y \in B_R(0) = \{x \in E: \|x\| \leq R\}$, $\lambda \in [0, 1]$, 这里 $W_p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^p + \lambda^p(1-\lambda)$.

引理 2^[1] 设 $\{r_n\}, \{s_n\}, \{t_n\}$ 为对所有 $n \geq n_1$, 满足 $r_{n+1} \leq (1+s_n)r_n + t_n$ 的非负实数列, 有

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ 存在;

2) 若存在 $\{r_n\}$ 的子列 $\{r_{n_i}\}$, 当 $i \rightarrow \infty$ 时, 有 $r_{n_i} \rightarrow 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

引理 3^[1] 假设 K 是一致凸 Banach 空间 E 的非空闭凸子集, $T: K \rightarrow E$ 是渐近非扩张映象, 则 $I-T$ 在 0 点处是半闭的.

2 主要结果

引理 4 假设 E 是一致凸 Banach 空间, K 是 E 的非空闭凸子集和非扩张收缩, P 为非扩张收缩映象, 映象 $T_i: K \rightarrow E$ 是非自渐近非扩张映象, $\{k_n^i\} \subset [1, \infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^i - 1) < \infty$, 实数列 $\{\alpha_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$, 满足 $\exists \varepsilon > 0, \varepsilon \leq \alpha_n^i \leq 1 - \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$; 序列 $\{x_n\}$ 由式 (1) 定义得到, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^i < \infty, \alpha_n^i + \beta_n^i + r_n^i = 1$, $\{u_n^i\}$ 有界, $i = 1, 2, \dots, N$, 若 $F := \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 存在, $\forall x^* \in F$.

证明: $\forall x^* \in F$,

$$\|x_n^1 - x^*\| \leq \|P(\alpha_n^1 T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + \beta_n^1 x_n + \gamma_n^1 u_n^1) - x^*\| \leq \alpha_n^1 k_n^1 \|x_n - x^*\| +$$

$$\beta_n^1 \|x_n - x^*\| + r_n^1 \|u_n^1 - x^*\| \leq k_n^1 \|x_n - x^*\| + r_n^1 \|u_n^1 - x^*\| \quad (2)$$

令 $d_n^0 := r_n^1 \|u_n^1 - x^*\|$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^1 < \infty$ 及 $\{u_n^1\}$ 有

界, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^0 < \infty$, 进一步有

$$\begin{aligned} \|x_n^2 - x^*\| &\leq \|P(\alpha_n^2 T_2 (PT_2)^{n-1} x_n^1 + \beta_n^2 x_n^1 + \gamma_n^2 u_n^2) - x^*\| \leq k_n^2 k_n^1 \|x_n - x^*\| + \\ &\quad r_n^2 \|u_n^2 - x^*\| \leq k_n^2 k_n^1 \|x_n - x^*\| + r_n^2 \|u_n^2 - x^*\| = \\ &\quad k_n^1 k_n^2 \|x_n - x^*\| + k_n^2 d_n^0 + r_n^2 \|u_n^2 - x^*\| \end{aligned} \quad (3)$$

令 $d_n^1 := k_n^2 d_n^0 + r_n^2 \|u_n^2 - x^*\|$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^2 - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty$ 及 $\{u_n^2\}$ 有界, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^0 < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^1 < \infty$.

以此类推, 存在一个非负的实数列 $\{d_n^{i-1}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, 使得

$$\begin{aligned} \|x_n^i - x^*\| &\leq k_n^i k_n^{i-1} \dots k_n^1 \|x_n - x^*\| + d_n^{i-1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{i-1} &< \infty, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|x_n^N - x^*\| \leq k_n^N k_n^{N-1} \dots k_n^1 \|x_n - x^*\| + d_n^{N-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4)$$

由 $\{k_n^i\} \subset [1, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^i - 1) < \infty$ 及引理 (2), 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 存在, $\forall x^* \in F$.

引理 5 假设 E 是一致凸 Banach 空间, K 是 E 的非空闭凸子集和非扩张收缩, P 为非扩张收缩映象, 映象 $T_i: K \rightarrow E$ 是渐近非扩张映象, $\{k_n^i\} \subset [1, \infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^i - 1) < \infty$, 实数列 $\{\alpha_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$, 满足 $\exists \varepsilon > 0, \varepsilon \leq \alpha_n^i \leq 1 - \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$; 序列 $\{x_n\}$ 由式

(1) 定义得到, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^i < \infty, \alpha_n^i + \beta_n^i + r_n^i = 1, \{u_n^i\}$ 有界, $i = 1, 2, \dots, N$, 若 $F := \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0, i = 1, 2, \dots, N$.

证明: 由引理 5 知, $\forall x^* \in F, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = r, r \geq 0$, 若 $r = 0$, 命题显然成立. 下面设 $r > 0$, 则

$$\|x_n^N - x^*\|^2 \leq \|P(\alpha_n^N T_N (PT_N)^{n-1} x_n^{N-1} +$$

$$\begin{aligned} & \beta_n^N \|x_n + \frac{N}{r_n} u_n - x^*\|^2 \leq \\ & \alpha_n^N (k_n^N \|x_n^{N-1} - x^*\| + \\ & \frac{N}{r_n} \|u_n - x_n\|)^2 + (1 - \alpha_n^N) \times \\ & (\|x_n - x^*\| + \frac{N}{r_n} \|u_n - x_n\|)^2 - \\ & W_2(\alpha_n^N) g(\|T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1} - \\ & x_n\|) \leq W_2(\alpha_n^N) g(k_n^1 k_n^2 \cdots k_n^N \times \\ & \|x_n - x^*\|)^2 + 2\lambda_n^{N-2} k_n^1 k_n^1 \cdots k_n^N \times \\ & \|x_n - x^*\| + (\lambda_n^{N-2})^2 - \\ & W_2(\alpha_n^N) g(\|T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1} - x_n\|) \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon \leq \alpha_n^N \leq 1 - \varepsilon$, 故

$$\begin{aligned} & W_2(\alpha_n^N) \geq \varepsilon^3, \\ & \varepsilon^3 g(\|T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1} - x_n\|) \leq \\ & (k_n^1 k_n^2 \cdots k_n^N \|x_n - x^*\|)^2 - \|x_n^{N-1} - x^*\|^2 + \\ & 2\lambda_n^{N-2} k_n^1 k_n^1 \cdots k_n^N \|x_n - x^*\| + (\lambda_n^{N-2})^2 \end{aligned}$$

这里, $\lambda_n^{N-2} = k_n^N d_n^{N-2} + \frac{N}{r_n} \|u_n - x_n\|$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{N-2} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{r_n} < \infty$ 及 $\{u_n^N\}$ 有界, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{N-2} = 0 \text{ 又由于 } \sum_{n=1}^{\infty} (k_n^i - 1) < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} k_n^i = 1,$$

$i = 1, 2, \cdots, N$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\|T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1} - x_n\|) = 0 \quad (5)$$

又因为 g 是一个连续且递增的凸函数, $g(0) = 0$, 当 $r > 0$ 时, $g(r) > 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1} - x_n\| = 0$. 记:

$$\begin{aligned} c_n^N &:= \|T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1} - x_n\|, \\ \|x_n - x^*\| &\leq \|x_n - T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1}\| + \\ &\|T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1} - x^*\| = \\ &c_n^N + k_n^N \|x_n^{N-1} - x^*\| \end{aligned}$$

由于 $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{N-1} - x^*\| \leq$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{N-1} - x^*\| \leq r, \text{ 故}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{N-1} - x^*\| = r \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \|x_n^{N-1} - x^*\|^2 &\leq \|P(\alpha_n^{N-1} T_{N-1}(P T_{N-1})^{n-1} x_n^{N-2} + \\ &\beta_{n-1}^{N-1} x_n + \frac{N-1}{r_{n-1}} u_{n-1}^{N-1}) - x^*\|^2 \leq \\ &\alpha_n^{N-1} (\|T_{N-1}(P T_{N-1})^{n-1} x_n^{N-2} - \\ &x^*\| + \frac{N-1}{r_{n-1}} \|u_{n-1}^{N-1} - x_n\|)^2 + \\ &(1 - \alpha_n^{N-1}) (\|x_n - x^*\| + \frac{N-1}{r_{n-1}} \times \\ &\|u_{n-1}^{N-1} - x_n\|)^2 - W_2(\alpha_n^N) g \times \\ &(\|T_N(P T_N)^{n-1} x_n^{N-1} - x_n\|) \leq \\ &\alpha_n^{N-1} (k_n^{N-1} \|x_n^{N-2} - x^*\| + \frac{N-1}{r_{n-1}} \times \\ &\|u_{n-1}^{N-1} - x_n\|)^2 + (1 - \alpha_n^{N-1}) \times \\ &(\|x_n - x^*\| + \frac{N-1}{r_{n-1}} \|u_{n-1}^{N-1} - x_n\|)^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & W_2(\alpha_n^{N-1}) g(\|T_{N-1}(P T_{N-1})^{n-1} \times \\ & x_n^{N-2} - x_n\|) \leq (k_n^1 k_n^2 \cdots k_n^{N-1} \|x_n - \\ & x^*\|)^2 + 2\lambda_n^{N-3} k_n^1 k_n^1 \cdots k_n^{N-1} \times \\ & \|x_n - x^*\| + (\lambda_n^{N-3})^2 - W_2(\alpha_n^{N-1}) \times \\ & g(\|T_{N-1}(P T_{N-1})^{n-1} x_n^{N-2} - x_n\|) \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon \leq \alpha_n^{N-1} \leq 1 - \varepsilon$, 故 $W_2(\alpha_n^{N-1}) \geq \varepsilon^3$; 又由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^i - 1) < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} k_n^i = 1, i = 1, 2, \cdots, N, \text{ 则}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\|T_{N-1}(P T_{N-1})^{n-1} x_n^{N-2} - x_n\|) = 0$$

又因为 g 是一个连续且递增的凸函数, $g(0) = 0$, 当 $r > 0$ 时, $g(r) > 0$, 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{N-1}(P T_{N-1})^{n-1} x_n^{N-2} - x_n\| = 0$$

以此类推

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i(P T_i)^{n-1} x_n^{i-1} - x_n\| = 0,$$

记

$$c_n^i := \|T_i(P T_i)^{n-1} x_n^{i-1} - x_n\| \quad (7)$$

进而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i(P T_i)^{n-2} x_n^{i-2} - x_{n-1}\| = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N \quad (8)$$

下面证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i(P T_i)^{n-1} x_n - x_n\| = 0, i = 1, 2, \cdots, N$

$$\begin{aligned} \|x_n^i - x_n\| &\leq \|P(\alpha_n^i T_i(P T_i)^{n-1} x_n^{i-1} + \beta_n^i x_n + \\ &\frac{i}{r_n} u_n^i) - x_n\| \leq \|T_i(P T_i)^{n-1} x_n^{i-1} - \\ &x_n\| + \frac{i}{r_n} \|u_n^i - x_n\| \leq \\ &c_n^i + \frac{i}{r_n} \|u_n^i - x_n\| \\ \|T_i(P T_i)^{n-1} x_n - x_n\| &\leq \|x_n - T_i(P T_i)^{n-1} x_n^{i-1}\| + \\ &\|T_i(P T_i)^{n-1} x_n^{i-1} - \\ &T_i(P T_i)^{n-1} x_n\| \leq \\ &c_n^i + k_n^i (c_n^i + \frac{i}{r_n} \|u_n^i - \\ &x_n\|) = (1 + k_n^i) + \\ &k_n^i \frac{i}{r_n} \|u_n^i - x_n\| \quad (9) \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i(P T_i)^{n-1} x_n^{i-1} - x_n\| = 0, \sum_{n=1}^{\infty} (k_n^i - 1) <$

∞ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{r_n} < \infty, \{u_n^i\}, \{x_n\}$ 有界, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i(P T_i)^{n-1} x_n - x_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \|x_n - (P T_N)^{n-1} x_n\| &\leq \|\alpha_{n-1}^N T_N(P T_N)^{n-2} x_{n-1}^{N-1} + \\ &\beta_{n-1}^N x_{n-1} + \frac{N}{r_{n-1}} u_{n-1}^{N-1} - \\ &T_N(P T_N)^{n-2} x_n\| \leq \\ &k_{n-1}^N (\|x_{n-1}^{N-1} - x_{n-1}\| + \\ &\|x_{n-1} - x_n\|) + \frac{N}{r_{n-1}} \|u_{n-1}^{N-1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{n-1} \| + (\beta_{n-1}^N + r_{n-1}^N) \times \\ & (\|x_{n-1} - T_N (PT_N)^{n-2} x_{n-1}\| + \\ & \|T_N (PT_N)^{n-2} x_{n-1} - \\ & T_N (PT_N)^{n-2} x_n\|) \leq \\ & k_{n-1}^N (\|x_{n-1}^{N-1} - x_{n-1}\| + \\ & \|x_{n-1} - x_n\|) + \\ & r_{n-1}^N \|u_{n-1} - x_{n-1}\| \end{aligned}$$

由式 (8)、(9) 及 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^i < \infty$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_N)^{n-1} x_n\| &= 0 \quad (11) \\ \|x_n - T_N x\| &\leq \|x_n - T_N (PT_N)^{n-1} x_n\| + \\ & k_1^N \|x_n - (PT_N)^{n-1} x_n\| \end{aligned}$$

由式 (11) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_N x\| = 0$

$$\begin{aligned} \|x_n - (PT_{N-1})^{n-1} x_n\| &\leq \|x_n - (PT_N)^{n-1} x_n\| + \\ & \|(PT_{N-1})^{n-1} x_n - \\ & (PT_N)^{n-1} x_n\| \leq \\ & \|x_n - (PT_N)^{n-1} x_n\| + \\ & \|T_{N-1} (PT_{N-1})^{n-2} x_n - \\ & T_{N-1} (PT_N)^{n-2} x_{n-1}\| + \\ & \|T_{N-1} (PT_N)^{n-2} \times \\ & x_{n-1} - x_{n-1}\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \\ & \|x_n - (PT_N)^{n-1} x_n\| \end{aligned}$$

由式 (9) ~ (11) 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_{N-1})^{n-1} x_n\| &= 0 \quad (12) \\ \|x_n - T_{N-1} x_n\| &\leq \|x_n - T_{N-1} (PT_{N-1})^{n-1} x_n\| + \\ & \|T_{N-1} (PT_{N-1})^{n-1} x_n - \\ & T_{N-1} x_n\| \leq \|x_n - T_{N-1} \times \\ & (PT_{N-1})^{n-1} x_n\| + k_1^{N-1} \|x_n - \\ & (PT_{N-1})^{n-1} x_n\| \end{aligned}$$

由式 (12) 知:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_{N-1} x_n\| &= 0 \text{ 同理得} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_i x_n\| &= 0, i=1, 2, \dots, N. \quad (13) \end{aligned}$$

定理 1 假设 E 是一致凸 Banach 空间满足 Opial 条件, K 是 E 的非空闭凸子集和非扩张收缩, P 为非扩张收缩映象, 映象 $T_i: K \rightarrow E$ 是渐近非扩张映象, $\{k_n^i\} \subset [1, \infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^i - 1) < \infty$, 实数列 $\{\alpha_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$, 满足 $\exists \varepsilon > 0, \varepsilon \leq \alpha_n^i \leq 1 - \varepsilon, \forall n \in N$; 序列 $\{x_n\}$ 由式 (1) 定义得到, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^i < \infty, \alpha_n^i + \beta_n^i + r_n^i = 1, \{u_n^i\}$ 有界, $i=1, 2, \dots, N$, 若 $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq$

Φ , 则序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $\{T_i: i=1, 2, \dots, N\}$ 的公共不动点.

证明: 设 $x^* \in F$, 由引理 (4) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 存在. 下证 $\{x_n\}$ 的每一个子列弱收敛于一点. 假设存在序列 $\{x_{n_i}\}, \{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, 使得

当 $i \rightarrow +\infty$ 时, $x_{n_i} \xrightarrow{\text{弱}} z_1$; 当 $j \rightarrow +\infty$ 时, $x_{n_j} \xrightarrow{\text{弱}} z_2$, 由引理 5 知

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - T_k x_{n_i}\| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - T_k x_{n_j}\| = 0, \\ \forall k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

再由引理 3 知, $I - T_k$ 在 0 点处是半闭的, 则 $T_k z_1 = z_1, T_k z_2 = z_2, \forall k=1, 2, \dots, N$. 即 $z_1, z_2 \in F$, 进一步证明 $z_1 = z_2$.

证明: 设 $z_1 \neq z_2$, 由 Opial 条件知:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z_1\| < \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z_2\| = \\ & \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z_2\| < \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z_1\| = \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\| \end{aligned}$$

产生矛盾, 因此 $z_1 = z_2$, 所以序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $\{T_i: i=1, 2, \dots, N\}$ 的公共不动点.

定理 2 假设 E 是一致凸 Banach 空间, K 是 E 的非空闭凸子集和非扩张收缩, P 为非扩张收缩映象, 映象 $T_i: K \rightarrow E$ 是渐近非扩张映象, $\{k_n^i\} \subset [1, \infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^i - 1) < \infty$, 实数列 $\{\alpha_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$, 满足 $\exists \varepsilon > 0, \varepsilon \leq \alpha_n^i \leq 1 - \varepsilon, \forall n \in N$; 序列 $\{x_n\}$ 由式

(1) 定义得到, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^i < \infty, \alpha_n^i + \beta_n^i + r_n^i = 1, \{u_n^i\}$

有界, $i=1, 2, \dots, N, F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \Phi$, 若 $\{T_i: i=1, 2, \dots, N\}$ 满足条件 (A), 则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\{T_i: i=1, 2, \dots, N\}$ 的公共不动点.

证明: 设 $x^* \in F$, 由引理 4 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = r$, 若 $r=0$, 显然成立.

若 $r>0$, 由引理 5 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$, 因为 $\{T_i: i=1, 2, \dots, N\}$ 满足条件 (A), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) = 0$, 又由式 (4) 知:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|x_n^N - x^*\| \leq k_n^1 k_n^2 \cdots k_n^N \|x_n - \\ & x^*\| + d_n^{N-1}, \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{N-1} < \infty. \end{aligned}$$

所以 $d(x_{n+1}, F) \leq k_n^1 k_n^2 \cdots k_n^N d(x_n, F)$, 由引理 2 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F)$ 存在.

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) = 0$, 而 f 是非减的连续函数, $f(0) = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$,

取 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, $\{y_i\} \subset F$, 使得 $\|x_{n_i} - y_i\| \leq 2^{-i}$. 由文 [3] 中的定理得 $\{y_i\} \subset F$ 是 Cauchy 列且收敛, 设 $y_i \rightarrow y$, 由于 F 是闭集, 所以 $y \in F$ 且 $x_{n_i} \rightarrow y$; 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = 0$, $y \in F$. 证毕.

参 考 文 献:

- [1] CH DUME C E, OFOEDU E U, ZEGEYE H. Strong and Weak Convergence Theorems for Asymptotically Nonexpansive Mapping [J]. Math, Anal, Appl, 2003, 280: 364 - 374.
- [2] SHAHZAD N. Approximating Fixed Point for Nonself Nonexpansive Mapping in Banach Spaces [J]. Nonlinear Analysis, 2005, 61: 1031 - 1039.
- [3] TAN K K, XU H K. Approximating Fixed Point for Nonexpansive

Mapping by the Ishikawa Iteration Process [J]. Math, Anal, Appl, 1993, 178: 301 - 308.

- [4] TIAN Y X, CHANG S S, HUANG J L. On the Approximation Problem of Common Fixed Points for a Finite Family of Nonself Asymptotically Quasi - nonexpansive-type Mapping in Banach Space [J]. Computers and Mathematics Appl, 1996, 53: 289 - 291.
- [5] 野金花, 崔云安. ϕ 强伪压缩映象不动点的近似逼近 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2005, 10 (6): 19 - 20.
- [6] 赵晓全. 渐近非膨胀映射的不动点 [J]. 哈尔滨电工学院学报, 1993, 16: 284 - 287.
- [7] 赵晓全. 带边界条件非膨胀映射的不动点 [J]. 纯粹数学与应用数学, 1989, 5: 86 - 87.

(编辑:付长纓)

(上接第 99 页)

$R(X) < 2$, 那么 X 有 M 不动点性质.

证明: 若 X 没有 M 不动点性质, 那么可以找到一有界闭凸集 K 使得 $\text{diam}(K) = 1$, 并且对于某一集值的 M 非扩张映射是最小不变的且存在 $\{x_n\}$ 为 K 中的渐近不动点序列. 因 K 为自反 Banach 空间的有界闭凸集, 故 K 为弱紧的, 因而可假设 $\{x_n\}$ 是弱收敛的, 由平移关系 $\{x_n\}$ 是弱零的. 考虑序列 $\{z_n\}$, 并且 $\{z_n\}$ 满足引理 3 中的 1) ~ 4). 如需需要, 可以取其子列, 并且假设 $\lim_n \|z_n - z\|$ 存在. 并有

$$\lim_n \|z_n - z\| \leq \lim_n \sup_m \lim_m \|z_n - z_m\| \leq \frac{1}{2}.$$

可以选择 $\eta > 0$ 使得 $\eta R(X) < 1 - R(X)/2$ 对于足够大的 n , 有 $\|z_n - z\| \leq 1/2 + \eta$, $\|z\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| \leq 1/2$ 因此

$$\left\| \frac{z_n}{1/2 + \eta} \right\| = \left\| \frac{z_n - z}{1/2 + \eta} + \frac{z}{1/2 + \eta} \right\| \leq R(X)$$

故 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| \leq R(X)(1/2 + \eta) < 1$ 与

$0 \in K$ 矛盾.

参 考 文 献:

- [1] BANAS J. On Modulus of Noncompact Convexity and its Properties [J]. Canada Math Bull, 1987, 30: 186 - 192.
- [2] BENAVIDES T D, ACEDO G L. Lower Bounds for Nomal Structure Coefficients [J]. Proc Royal Soc Edinburgh, 1992, 121: 245 - 252.
- [3] GOEBEL K, SEKOWSKI T. The modulus of Noncompact Convexity [J]. Ann Univ Mariae Cubrie - Skłodowska, 1984, 38: 41 - 48.
- [4] GARCÍA-Falset J. Stability and Fixed Points for Nonexpansive Mappings [J]. Houston J. Math, 1994, 20: 495 - 505.
- [5] GARCÍA-Falset J. The Fixed Point Property in Banach Spaces with NUS Property [J]. J. Math. Anal. Appl, 1997, 215: 532 - 542.
- [6] JR N. S. B., Multivalued Contraction Mapping [J]. Pacif J. Math, 1969, 30: 475 - 488.

(编辑:王 萍)